PARAGRAAF 15.1 : HELLINGEN, BUIGPUNTEN EN TOPPEN

LES 1 : BUIGPUNTEN

DEFINITIES

(1) Buigpunt = { Punt waar de helling maximaal of minimaal is }

(2) Buigpunt berekenen ⇔ $f'(x)$ heeft een top ⇔ $f''(x)$ = 0

(3) $\frac{df}{dx} = f'(x)$

(4) $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = f''(x)$

(5) Bij een buigpunt :

1. Is er een top bij $f'(x)$
   Helling is maximaal of minimaal

2. Gaat $f''(x)$ door de x-as (van + naar – of omgekeerd).
   Helling van $f'(x)$ is daar immers nul

VOORBEELD 1

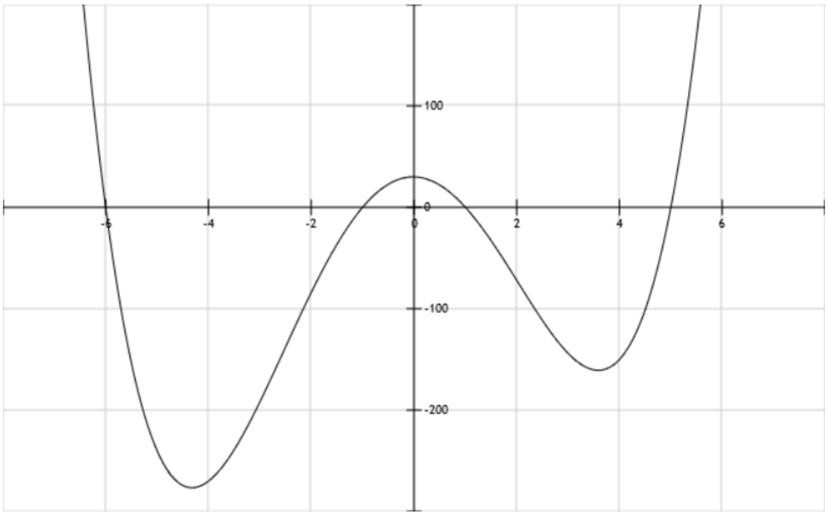
Gegeven is de formule $f(x) = x^4 + x^3 - 31x^2 - x + 30$. Van deze formule zijn op de volgende pagina de grafieken van $f(x), f'(x)\ en\ f''(x)$ geschetst.

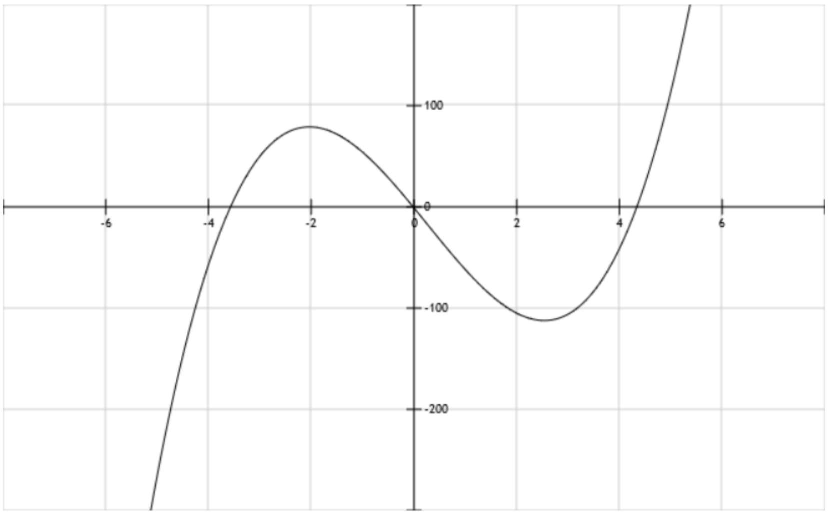
a. Geef aan waar de buigpunten zitten in alle 3 de grafieken.

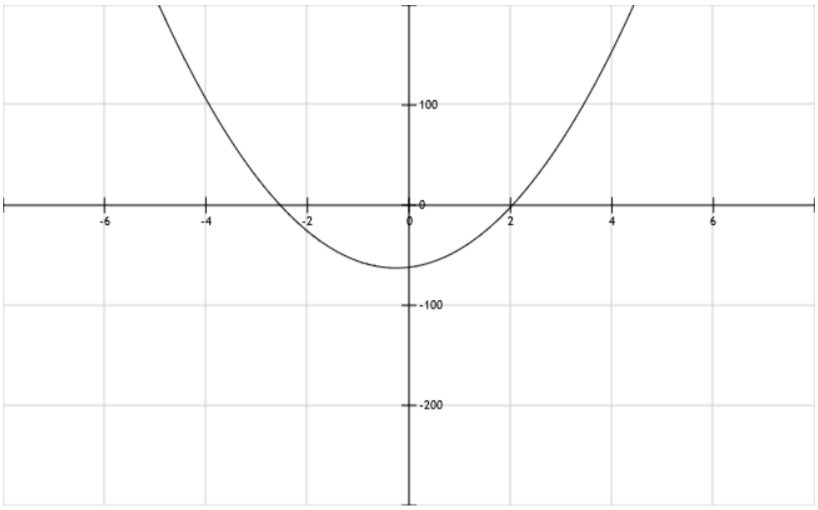
Leg uit aan de hand van alle drie de grafieken of ze toenemend/afnemend stijgend/dalend zijn op

b. Het interval < -3 , -2 >

c. Het interval < 0 , 2 >


100
0
-100
-200
-6
-4
-2
0
2
4
6


100
0
-100
-200
-6
-4
-2
0
2
4
6


100
0
-100
-200
-6
-4
-2
0
2
4
6

OPLOSSING 1

a. Buigpunten

1. Bij $f''(x) \rightarrow$ Als $f''^{(x)} = 0$ dus bij $x = -2\frac{1}{2}$ $en\ x = 2$
2. Bij $f(x) \rightarrow$ Overgang van toenemend stijgend/dalend naar afnemend stijgend/dalend
3. Bij $f(x) \rightarrow$ Overgang van toenemend stijgend/dalend naar afnemend stijgend/dalend

b. Het interval $< -3 , -2 >$

c. Het interval $< 0 , 2 >$

VOORBEELD 2

De grafiek van $f(x) = ax^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + b$ gaat in het punt A(3,5) over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

Bereken exact a en b.

OPLOSSING 2

(1) $f``(3) = 0$

$f(x) = ax^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + b$

$f`(x) = 4ax^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$

$f`(x) = 12ax^2 - x - 6$

$f``(3) = 0$

$f``(3) = 12a3^2 - 3 - 6\ = 0$

$108\text{a} \ = \ 9$

$\text{a} \ = \dfrac{9}{108} = \dfrac{1}{12}$

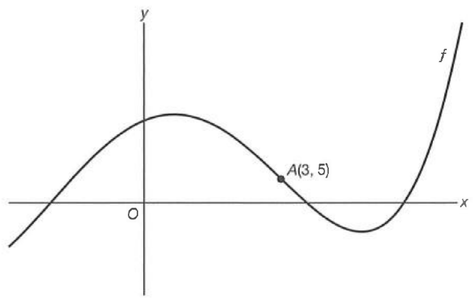
(2) Buigpunt A = (3,5) dus

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + b$

$f(3) = \frac{1}{12} \cdot 3^4 - \frac{1}{6} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + b = 5$

$b = 17\frac{3}{4}$

Controle met Grafiek:



CONCLUSIE:

De grafiek van f gaat in punt A over van toenemend naar afnemend dalend.

Dus a $= \frac{1}{12}$ en $b = 17\frac{3}{4}$

LES 2 : AFSTANDEN

De grafiek van de functie $f_p(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + p$ heeft twee toppen; A en B.

Bereken exact voor welke p de lengte van het lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OB.

OPLOSSING 1

(1) Toppen berekenen $f_p`(x) = 0$

$f_p`(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-1)(x-3) = 0$

$x - 1 = 0$ v $x - 3 = 0$

$x = 1$ v $x = 3$

$f_p(1) = \frac{2}{3} \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + p = 2\frac{2}{3} + p$

$f_p(3) = \frac{2}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + p = 0 + p = p$

$A(1\,, 2\frac{2}{3} + p)$ en $b(3, p)$

(2) Los op d(O,A) = d(O,B)

$d(O,A) = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(2\frac{2}{3} + p - 0\right)^2} = \sqrt{8\frac{1}{9} + 5\frac{1}{3}p + p^2}$

$d(O,B) = \sqrt{(3-0)^2 + (p-0)^2} = \sqrt{9 + p^2}$

OA = OB (of makkelijker <u>OA^2 = OB^2</u>)geeft:

$8\frac{1}{9} + 5\frac{1}{3}p + p^2 = 9 + p^2$

$5\frac{1}{3}p = \frac{8}{9} \qquad \rightarrow p = \frac{1}{6}$

CONCLUSIE

Dus voor $p = \frac{1}{6}$ is de lengte van het lijnstuk OA gelijk aan de lengte van het lijnstuk OB.

PARAGRAAF 15.2 : RAAKPROBLEMEN

DEFINITIE HOEK TUSSEN F EN G

Hoek φ tussen twee functies f en g bereken je met

$\tan(\alpha) = rc_f \;\; en \;\; \tan(\beta) = rc_g \;\; \rightarrow \;\; \varphi = \; \alpha - \beta \;\; (\varphi \leq 90)$

DEFINITIE RAKEN VAN F EN G

Twee functies f en g raken elkaar als :

(1) $f(x) = g(x)$ én
(2) $f'(x) = g'(x)$

DEFINITIE LOODRECHT SNIJDEN VAN F EN G

Twee functies f en g raken elkaar als :

(1) $f(x) = g(x)$ én
(2) $f'(x) \times g'(x) = -1$

VOORBEELD 1

Gegeven $f(x) = x + p$ en $g(x) = \sqrt{x+2}$.

a. Onderzoek of de grafieken elkaar raken voor $p = 0$.
b. Bereken voor welke p ze elkaar wel raken.

Gegeven is ook de functie $h(x) = -2x + q$.

c. Voor welke p snijden de functies g en h elkaar loodrecht

OPLOSSING 1

a. **(1)** $f(x) = g(x)$

$x = \sqrt{x+2}$

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 \quad v \quad x = -1$ (kan niet)

(2) $f'(x) = g'(x)$

$f'(x) = 1$ en $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$x = 2 \rightarrow g'(2) = \frac{1}{4} \neq 1$ dus geen raakpunt

Er is dus geen raakpunt

b. **(1)** $f'(x) = g'(x)$ dus $1 = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$2\sqrt{x+2} = 1$

$\sqrt{x+2} = \frac{1}{2}$

$x + 2 = \frac{1}{4}$

$x = -1\frac{3}{4}$

(2) $f(x) = g(x)$

$x = -1\frac{3}{4} \rightarrow g\left(-1\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\ \ en\ \ f\left(-1\frac{3}{4}\right) = -1\frac{3}{4} + p$

Deze moeten gelijk zijn dus :

$\frac{1}{2} = -1\frac{3}{4} + p$

$p = 2\frac{1}{4}$

c. $h'(x) \cdot g'(x) = -1$

$-2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = -1$

$\sqrt{x+2} = 1$

$x = -1$

$x = -1 \rightarrow g(-1) = 1 \;\; en \;\; h(-1) = 2 + q$

Deze moeten gelijk zijn dus : $1 = 2 + q \Leftrightarrow q = -1$

PARAGRAAF 15.3 : OPTIMALISERINGSPROBLEMEN

SCHEMA BLZ 115 !!!!!

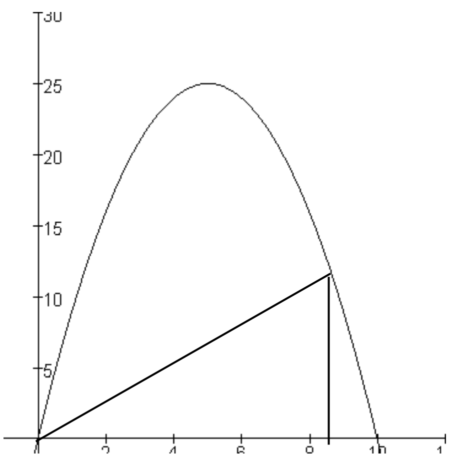
LET VOORAL OP

(1) TOON AAN …

(2) BEWIJS … !!!!!!

DIT MOET BEIDE EXACT !!!

VOORBEELD 1



Gegeven is de parabool $y = -x^2 + 10x$. De lijn $x = p$ (met $0 < p < 10$) snijdt de x-as in het punt B en de parabool in punt C.

a. Toon aan dat de oppervlakte van driehoek OBC voor willekeurige p gelijk is aan $O = 5p^2 - \frac{1}{2}p^3$.

b. Bereken algebraïsch voor welke p de oppervlakte maximaal is.

OPLOSSING 1

a. $OB = p \; en \; BC = -p^2 + 10p$.

$Opp \; OBC = ½ \cdot p \cdot (-p^2 + 10p) = 5p^2 – ½p^3$.

b. Maximum : $Opp' = 10p – 1 ½p^2 = 0$

$p(10 - 1 ½ p) = 0$

$p = 0 \; v \; 1 ½ p = 10$

$p = 0 \; v \; p = 6\frac{2}{3}$.

(kn)

PARAGRAAF 15.4 : INTEGRALEN BIJ OPPERVLAKTE / INHOUD

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $f(x) = \frac{6x+4}{3x-5}$.

Bereken de primitieve.

OPLOSSING 1

Maak eerst een staartdeling :

3x + 5 / 6x – 4 \ 2

<u>6x + 10</u> –

-14

Dus $f(x) = \frac{6x+4}{3x-5} = 2 + \frac{-14}{3x+5}$

$f(x) = 2 - \frac{14}{3x+5}$

Nu is de primitieve geen probleem :

$F(x) = 2x - 14\ln|3x+5| \cdot \frac{1}{3}$

$F(x) = 2x - \frac{14}{3}\ln|3x+5|$